6. Binomialverteilung - Wahrscheinlichkeitsverteilung bei Bernoulli-Ketten

1. Ein Beispiel

Es sei eine Bernoulli-Kette gegeben mit den Parametern **n = 5** und **p = 0,4.** Für die Zufallsvariable X ergeben sich daher folgende Werte und Wahrscheinlichkeiten (Die Berechnung erfolgte mit der Formel von Bernoulli; Ergebnisse wurden auf 3 Nachkommastellen gerundet):

k	0	1	2	3	4	5
P(X=k) $=B_{5;\,0,4}(k)$	$\frac{243}{3125} \approx 0{,}078$	$\frac{162}{625} \approx 0{,}259$	$\frac{216}{625} \approx 0{,}346$	$\frac{144}{625} \approx 0{,}230$	$\frac{48}{625} \approx 0{,}077$	$\frac{32}{3125} \approx 0{,}010$

Berechnungsbeispiel: k = 3

P(X=3) = $B_{5;\,0,4}(3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot (1-0{,}4)^{5-3}$

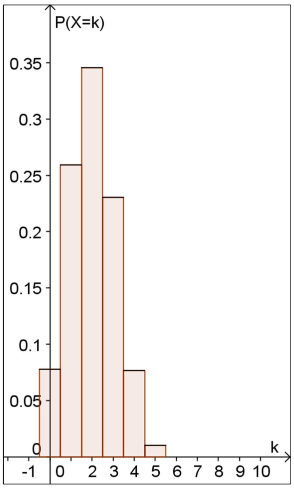

Abbildung 1: Histogramm zu $B_{5;\,0,4}$

Die Tabelle stellt die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten dar. Deswegen nennt man sie auch **Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X.** Anstelle von P(X=k) kann man die Wahrscheinlichkeiten auch mit $B_{5;\,0,4}(k)$ bezeichnen.

Das rechts stehende **Histogramm** stellt diese Wahrscheinlichkeitsverteilung graphisch dar. Das Histogramm ist ein Säulendiagramm, bei dem die Wahrscheinlichkeiten P(X=k) durch die Flächeninhalte der Rechtecke veranschaulicht werden. Bei Bernoulli-Ketten ist die Breite einer Säule immer eins, sodass auch die Höhen der Säulen den Wahrscheinlichkeiten P(X=k) entsprechen.

(Ein weiteres Beispiel mit n=4 und p= 0,75 findest du im Buch S. 139)

2. Definition

Definition:

Eine Zufallsvariable X heißt **binomialverteilt** mit den Parametern n und p, wenn sie sich als Trefferzahl bei einer Bernoulli-Kette der Länge n und Trefferwahrscheinlichkeit p beschreiben lässt. Dann bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit P(X=k) für k Treffer mit $\mathbf{B_{n;p}(k)}$ (für k=0,1,…,n).

Die Funktion, die jeder Zahl k die Wahrscheinlichkeit $B_{n;p}(k)$ zuordnet, heißt **Binomialverteilung mit den Parametern n und p**.

Man sagt: Die Zufallsvariable ist $\mathbf{B_{n;p}}$**–verteilt.**

3. Übung I

S. 140 /1
S. 140 /2
<u>Berechnung mit Hilfe deines Taschenrechners</u> (Es gibt viele hilfreiche Anleitungen im Internet, falls dir die folgende nicht zusagt☺):

MODE → 4:DIST → 4:BinomialPD → 2:Var → „gib k ein und drücke dann =“ → „gib n ein und drücke dann =“ → „gib p ein und drücke dann =“ →“Es erscheint die gewünschte Wahrscheinlichkeit“

Beispiel: $B_{5;\,0,4}(2)$
MODE → 4:DIST → 4:BinomialPD→ 2:Var → 2→ 5 → 0,4 → 0,3456 *(siehe Tabelle oben)*

4. Erwartungswert der Binomialverteilung

Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X kann man den Erwartungswert E(X) der Zufallsgröße X berechnen.

Bei unserem obigen Beispiel (1.) ergibt sich:

$$E(X) = 0 \cdot P(X=0) + 1\cdot P(X=1) + 2\cdot P(X=2) + 3\cdot P(X=3) + 4\cdot P(X=4) + 5\cdot P(X=5) =$$
$$= 0 \cdot \frac{243}{3125} + 1\cdot \frac{162}{625} + 2\cdot \frac{216}{625} + 3\cdot \frac{144}{625} + 4\cdot \frac{48}{625} + 5\cdot \frac{32}{3125}$$
$$= 2$$

Die Zahl gibt an, welcher Wert bei einer großen Anzahl von Durchführungen der Bernoulli-Kette im Durchschnitt zu erwarten ist.

Der Wert ist auch einfach nachvollziehbar. Bei 5 Durchgängen mit einer Erfolgswahrscheinlichkeit von p = 0,4 wird man auf lange Sicht 5·0,4=2 Treffer pro Durchführung erwarten.

SATZ:

Eine $B_{n;p}$- verteilte Zufallsgröße hat den Erwartungswert

$$\mathbf{E(X) = \mu = n \cdot p.}$$

Bei einer großen Anzahl von Durchführungen einer Bernoulli-Kette der Länge n und der Trefferwahrscheinlichkeit p kann man durchschnittlich n·p Treffer erwarten.

Beispiel:

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern n = 30 und p= $\frac{1}{3}$.

Daraus ergibt sich der Erwartungswert E(X) = 30 · $\frac{1}{3}$ = 10

5. Übung II

S. 141 / 3
S. 141 / 4 (Lies dir dazu noch das Beispiel 2 auf Seite 140 durch)
S.141 / 5,6
S. 142 / 10
S. 142 / **11, 12, 13
S. 142 / 15

**** Der folgende Link enthält eine GeoGebra Datei, die du herunterladen kannst. Mit dieser Datei kannst du die Parameter n und p ganz einfach über einen Schieberegler verändern und beobachten, wie sich dabei das Histogramm verändert. Probiere es doch einfach mal aus:**

https://www.hsg-kl.de/faecher/m/computer/geogebra/binomial/index.php